Préambule : notations et rappels

Notations

- ▷ On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs et par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs.
- ▷ On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes et par $\mathbf{K}$ l'un de ces deux corps lorsqu'on ne souhaite pas le préciser.
- ▷ Si m et n sont deux entiers relatifs, on pose $[\![m\,;\,n]\!] = \{k \in \mathbf{Z}; m \leqslant k \leqslant n\}$.
- ▷ Pour n entier naturel non nul, on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1\,;\,n]\!]$.
- ▷ Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles.
- ▷ Pour une famille $(u_1, \ldots, u_k)$ de vecteurs de E, on note $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille.
- ▷ Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la $\mathbf{K}$-algèbre des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbf{K}$ et I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- ▷ On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles, $\mathrm{O}_n(\mathbf{K})$ celui des matrices orthogonales et $\mathrm{SO}_n(\mathbf{K})$ le groupe des matrices orthogonales de déterminant égal à 1.
- ▷ On note $T_n^+(\mathbf{K})$ le groupe multiplicatif des matrices triangulaires supérieures inversibles et $T_n^-(\mathbf{K})$ le groupe multiplicatif des matrices triangulaires inférieures inversibles.
- ▷ Soit n un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
  Pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on note L_i la i-ème ligne de la matrice A. Pour $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, on note C_j la j-ème colonne de la matrice A.
- ▷ Soit n un entier naturel non nul et $(i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne qui vaut 1. Par exemple lorsque $n = 2$, on a :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappels et compléments sur les actions de groupe (pour la partie IV)

- ▷ Soient $(G, *)$ un groupe dont l'élément neutre est noté e et X un ensemble non vide. On appelle **action** de G sur X toute application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \right.$$

  vérifiant les deux propriétés suivantes :

  1. $\forall x \in X,\ e \cdot x = x$

  2. $\forall g, h \in G,\ \forall x \in X,\ g \cdot (h \cdot x) = (g * h) \cdot x$

Tournez la page S.V.P.

Lorsque l'on dispose d'une telle action, on dit que le groupe G **agit** sur l'ensemble X.

- ▷ Pour tout $x \in X$, on désigne par O_x l'**orbite** de x. Par définition :

$$O_x = \{y \in X,\ \exists g \in G,\ y = g \cdot x\}.$$

On rappelle que la relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur X par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \in O_x$, est une relation d'équivalence sur X.

- ▷ Le **stabilisateur** d'un élément x de X est le sous-groupe de G défini par :

$$\mathrm{Stab}_x = \{g \in G,\ g \cdot x = x\}.$$

- ▷ On dit qu'une action est **transitive** (ou que le groupe G **agit transitivement** sur X) lorsque l'action ne possède qu'une seule orbite. Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in X \times X,\ \exists g \in G \text{ tel que } y = g \cdot x.$$

- ▷ On dira qu'une action est **fidèle** (ou que le groupe G **agit fidèlement** sur X) lorsque l'intersection de tous les stabilisateurs est le sous-groupe $\{e\}$:

$$\bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}_x = \{e\}.$$

Partie I : drapeaux de sous-espaces vectoriels

Dans toute cette partie, E est un espace vectoriel de dimension finie n ($n \geqslant 1$) sur $\mathbf{K}$ (on rappelle que $\mathbf{K}$ désigne indifféremment le corps des réels ou des complexes).

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Une famille $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de sous-espaces vectoriels de E est appelée drapeau si elle vérifie :

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_p = E$$

En particulier pour tout entier i compris entre 0 et $p-1$, E_i est un sous-espace vectoriel strict de E_{i+1}. On dit qu'un drapeau $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ est **total** lorsque $p = n$.

1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose $E_0 = \{0\}$ et, $\forall j \in [\![1 ; n]\!]$, $E_j = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_j)$.
Montrer que $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est un drapeau total de E.

Etant donné un drapeau total $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, on dit qu'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est **adaptée** à ce drapeau si $\forall j \in [\![1 ; n]\!]$, $E_j = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_j)$.

2. Montrer que tout drapeau total admet une base adaptée.

3. Soit $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ un drapeau total de E. Montrer que si E est un espace euclidien, alors il existe une base orthonormée de E adaptée au drapeau.

Soit $u \in L(E)$. On dit qu'un drapeau $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est stable par u lorsque, pour tout $i \in [\![0 ; n]\!]$, le sous-espace E_i est stable par u.

Dans la suite de cette partie, u désigne un endomorphisme de E.

4. On suppose *dans cette question uniquement* que u est diagonalisable. Montrer qu'il existe un drapeau total de E, stable par u.

5. On suppose *dans cette question uniquement* que u est nilpotent d'indice n, c'est-à-dire que u vérifie $u^n = 0_{L(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{L(E)}$.

(a) Soit $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$ et $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(u^{n-j}(x))_{j \in [\![1 \,;\, k]\!]}$ est libre.

(b) Montrer que $(\mathrm{Ker}\ u^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est un drapeau total de E, stable par u. Construire une base adaptée à ce drapeau.

6. Montrer que u est trigonalisable si et seulement si E admet un drapeau total stable par u.

7. Montrer à l'aide des questions précédentes que si E est euclidien et que u est trigonalisable, alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Partie II : des groupes quotients

Dans cette partie, on désigne par G un groupe dont la loi est notée multiplicativement et H un sous-groupe de G. On note 1_G l'élément neutre de G.
On rappelle que si $g \in G$, on désigne par gH l'ensemble appelé **classe à gauche** :

$$gH = \{gh,\ h \in H\}.$$

De manière analogue, on appelle l'ensemble Hg une classe à droite.
On rappelle que la relation binaire définie par : $g_1 \mathcal{R} g_2 \Leftrightarrow g_2 \in g_1 H$ est une relation d'équivalence, dont les classes sont les ensembles du type gH et que l'on désigne par G/H l'ensemble quotient pour cette relation.
On dit que le sous-groupe H est distingué dans G lorsque : $\forall g \in G,\ gH = Hg$. On note dans ce cas $H \triangleleft G$. On remarquera que $H \triangleleft G \Leftrightarrow \forall g \in G,\ g^{-1}Hg \subset H$.

8. Soit $H \triangleleft G$.

(a) Montrer que G/H peut être muni d'une structure de groupe en considérant la loi de composition $\star$ définie par $(g_1H) \star (g_2H) = g_1g_2H$.
On expliquera pourquoi on a bien défini ainsi une loi de composition interne sur G/H.

(b) Montrer que l'application $\pi : G \to G/H$ définie pour tout $g \in G$ par $\pi(g) = gH$ est un morphisme de groupe surjectif.

9. On désigne dans cette question par $TU_n^+(\mathbf{K})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures dont tous les coefficients diagonaux valent 1.

(a) Montrer que $TU_n^+(\mathbf{K}) \triangleleft T_n^+(\mathbf{K})$.

(b) A-t-on $TU_n^+(\mathbf{K}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$?

10. Soit H un sous-groupe quelconque de G. On suppose que G/H est un ensemble fini à deux éléments. Montrer que $H \triangleleft G$.

Tournez la page S.V.P.

11. *Dans cette question uniquement*, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On désigne par

$$\Delta = \left\{ I_2, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B \right\}.$$

(a) Vérifier que $A^3B = BA$, et montrer que Δ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

(b) On définit $\Gamma =< A >$ le sous-groupe de Δ engendré par A et $R =< B >$ le sous-groupe de Δ engendré par B. Montrer que Δ/Γ est un groupe, isomorphe à R.

(c) Existe-t-il un isomorphisme entre les groupes Δ et $\Gamma \times R$?

Soient H et K deux sous-groupes quelconques de G. Pour tout $g \in G$ on appelle double classe de g relative aux sous-groupes H et K l'ensemble :

$$HgK = \left\{ hgk,\ (h,k) \in H \times K \right\}.$$

Dans la suite, H et K étant fixés, on parlera simplement de « la double classe d'un élément de G ».

12. **(a)** Montrer qu'une double classe est une réunion de classes à gauche, et aussi une réunion de classes à droite.

(b) Montrer que les doubles classes relatives aux sous-groupes H et K constituent une partition de G.

Partie III : décomposition de Bruhat et matrices

Dans cette partie, E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbf{N}^*$).
On munit E d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

13. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit u_σ l'endomorphisme de E défini par l'égalité :

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!],\ u_\sigma(\varepsilon_i) = \varepsilon_{\sigma(i)}$$

et P_σ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Une telle matrice P_σ est appelée matrice de permutation.

(a) *Dans cette question uniquement*, σ est le n-cycle $(1, 2, \ldots, n)$. Expliciter la matrice P_σ.

(b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note $\sigma = c_1 \ldots c_k$ une décomposition de σ en cycles de supports disjoints, où $k \in \mathbf{N}^*$.
Exprimer la matrice P_σ en fonction des matrices P_{c_j} pour $j \in [\![1\,;\, k]\!]$.

(c) Montrer que $P_\sigma \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

(d) À quelle condition sur σ la matrice P_σ appartient-elle à $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$?

14. Pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $(i, j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$, on note $T_{i,j}(\lambda)$ la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$.
Pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, on note $D_i(\lambda)$ la matrice $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

(a) Montrer que la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ est obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

(b) De manière analogue, donner les opérations élémentaires à effectuer pour obtenir les matrices $D_i(\lambda)A$, $AT_{i,j}(\lambda)$ et $AD_i(\lambda)$.

(c) Donner les opérations élémentaires à effectuer pour obtenir les matrices $P_{i,j}A$ et $AP_{i,j}$, où $P_{i,j}$ désigne la matrice P_σ lorsque σ est la transposition (i, j). Expliquer sans démonstration comment obtenir $P_\sigma A$ et AP_σ à partir de A, lorsque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation quelconque.

15. Soient U et V deux matrices triangulaires supérieures inversibles et soient σ et σ' deux permutations.
On suppose que $P_\sigma^{-1} U P_{\sigma'} = V$. Montrer que $\sigma = \sigma'$. *Indication :* On pourra considérer le coefficient d'indice $(\sigma(j), j)$ de $P_\sigma V$, où $j \in [\![1 ; n]\!]$.

16. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible.

(a) Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure U ne comportant que des 1 sur la diagonale, une matrice triangulaire supérieure V et une matrice de transposition P_σ telles que $A = UP_\sigma V$ et que cette écriture peut être obtenue à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de la matrice A. *On appelle cette écriture décomposition de Bruhat de la matrice A.*

(b) Montrer que la matrice P_σ de la question précédente est uniquement déterminée par A.

Le résultat de la question 16 permet donc d'affirmer que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \subset \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_n^+(\mathbf{K}) P_\sigma T_n^+(\mathbf{K}).$$

Nous admettrons par la suite que cette inclusion est une égalité.

17. Déterminer la décomposition de Bruhat d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ i.e. telle que $ad - bc = 1$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se place dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ d'une norme quelconque $\|\cdot\|$.
Les **mineurs principaux** d'une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1 ; n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont les déterminants des matrices extraites $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1 ; k]\!]^2}$ pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, ces matrices étant obtenues en ne conservant que les k premières lignes et k premières colonnes de la matrice A.

18. On considère les deux propositions ci-dessous, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$:

- ▷ $(\mathbf{E}_1)$: la matrice A s'écrit comme produit d'un élément de $T_n^-(\mathbf{C})$ et d'un élément de $T_n^+(\mathbf{C})$,
- ▷ $(\mathbf{E}_2)$: les mineurs principaux de A sont tous non nuls.

(a) Montrer que si A satisfait la propriété $(\mathbf{E}_1)$ ou la propriété $(\mathbf{E}_2)$ alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

(b) À l'aide d'une décomposition par blocs, montrer que $(\mathbf{E}_1) \Rightarrow (\mathbf{E}_2)$.

(c) En procédant par récurrence, montrer que $(\mathbf{E}_2) \Rightarrow (\mathbf{E}_1)$.

19. Montrer que l'ensemble des matrices qui vérifient la condition $(\mathbf{E}_2)$ est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. *Indication* : on pourra considérer pour $k \in [\![1 ; n]\!]$ l'application φ_k de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ qui à une matrice A, associe son mineur principal d'ordre k.

20. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ définie, pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, par : $\tau(k) = n - k + 1$.

Tournez la page S.V.P.

(a) Montrer que : $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau = T_n^-(\mathbf{C})$, où $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau$ désigne l'ensemble $\left\{P_\tau U P_\tau, U \in T_n^+(\mathbf{C})\right\}$.

(b) Montrer que $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau T_n^+(\mathbf{C}) = \left\{P_\tau U P_\tau V,\ (U,V) \in T_n^+(\mathbf{C}) \times T_n^+(\mathbf{C})\right\}$ est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

(c) Montrer que $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

(d) Montrer que l'application :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & P_\tau A \end{array}\right.$$

réalise un homéomorphisme.

(e) En déduire que $T_n^+(\mathbf{C})P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ est un ouvert dense de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Que peut-on affirmer sur la topologie de l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq \tau}} T_n^+(\mathbf{C})P_\sigma T_n^+(\mathbf{C})$?

Partie IV : décomposition de Bruhat et drapeaux

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$.
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux totaux de E et Δ l'ensemble des bases de E.

Dans cette partie, on désigne par δ l'application de Δ à valeurs dans $\mathcal{D}$ qui, à une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$, associe le drapeau total $(\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_i))_{i \in [\![1\,;n]\!]}$.

21. Montrer que le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ agit fidèlement et transitivement sur l'ensemble Δ par :

$$g \cdot (e_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]} = \big(g(e_i)\big)_{i \in [\![1\,;n]\!]}.$$

22. Montrer que $\mathrm{GL}(E)$ agit transitivement sur l'ensemble $\mathcal{D}$ par :

$$g \cdot (E_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]} = \big(g(E_i)\big)_{i \in [\![1\,;n]\!]}$$

et que les actions définies dans cette question et la question précédente sont compatibles, c'est-à-dire que :

$$\forall B \in \Delta,\ \forall g \in \mathrm{GL}(E),\ \delta(g \cdot B) = g \cdot \delta(B).$$

Dans la suite de la partie, *via* le choix d'une base $B_0 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, on identifie E à $\mathbf{K}^n$ et le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ à l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ des matrices inversibles.

23. Montrer que le stabilisateur de $\delta(B_0)$ s'identifie au sous-groupe $T_n^+(\mathbf{K})$ des matrices triangulaires supérieures inversibles.

24. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ par : $M\ \mathcal{R}\ N$ si et seulement si $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbf{K})$, pour $M, N \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Pour $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, on note $\overline{M}$ la classe de M dans l'ensemble quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$.

25. On considère l'application φ suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \overline{M} & \longmapsto & \varphi(\overline{M}) = M \cdot \delta(B_0) \end{array} \right.$$

(a) Montrer que φ est bien définie.

(b) Montrer que φ est une bijection de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{D}$.

26. Montrer que pour tout X et Y de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, on a $\varphi(\overline{XY}) = X \cdot \varphi(\overline{Y})$.

On considère l'action du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$ définie par $A \cdot (\overline{X}, \overline{Y}) = (\overline{AX}, \overline{AY})$.

27. Soient X et Y dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. À l'aide de la décomposition de Bruhat, montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $T_1 \in T_n^+(\mathbf{K})$ tel que $(\overline{X}, \overline{Y}) = XT_1 \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$, et que σ est unique.

28. En déduire le nombre d'orbites dans l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$.

FIN DU SUJET